ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ – ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΠΕΔΙΟΥ ΚΛΙΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ $1^{η}$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$\int_{C_i} \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} d(x,y)$ όπου $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ έχει τύπο

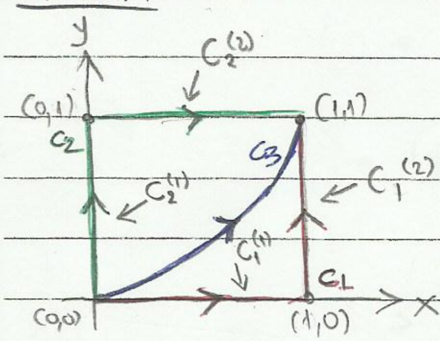
$f(x,y) = (y, x-y)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

C_1: πολυγωνική γραμμή όπου συνδέει τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$ με τη σειρά.

C_2: πολυγωνική γραμμή όπου συνδέει τα σημεία $(0,0)$, $(0,1)$ και $(1,1)$ με τη σειρά

C_3: τμήμα της παραβολής $y=x^2$ από το $(0,0)$ στο $(1,1)$

ΛΥΣΗ



Έστω $C_1=\gamma([0,1])$ με $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$

Έστω $C_2=\sigma([0,1])$ με $\sigma:[0,1]\to\mathbb{R}$

Έστω $C_3=\rho([0,1])$ με $\rho:[0,1]\to\mathbb{R}$

Επίσης $\gamma=\gamma_1\oplus\gamma_2$ και $\sigma=\sigma_1\oplus\sigma_2$

Όπου $C_1^{(1)}=\gamma_1([0,1])$ και $C_1^{(2)}=\gamma_2([0,1])$

Και όμοια $C_2^{(1)}=\sigma_1([0,1])$ και $C_2^{(2)}=\sigma_2([0,1])$

Έτσι, $\int_{C_1} f(x,y)\cdot d(x,y) = \int_{C_1^{(1)}} f(x,y)\cdot d(x,y) + \int_{C_1^{(2)}} f(x,y)\cdot d(x,y) =$

$$= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt \quad (1)$$

όπου,

$\gamma_1(t) = (t,0)$, $t\in[0,1]$ και $\gamma_2(t)=t(0,1)+(1,0)=(1,t)$ για $t\in[0,1]$.

Άρα, η (1) είναι:

$$\int_0^1 f(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^1 f(1,t)\cdot(0,1)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}(1,0)\,dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}\cdot(0,1)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Αντίστοιχως, και για το C_2

$$\int_{C_2} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{C_2^{(1)}} f(x,y)\,d(x,y) + \int_{C_2^{(2)}} f(x,y)\,d(x,y) =$$

$$= \int_0^1 f(\sigma_1(t))\,\sigma_1'(t)\,dt + \int_0^1 f(\sigma_2(t))\cdot\sigma_2'(t)\,dt \quad (2)$$

όπου,
$\sigma_1(t) = (0,t)$, $\forall t\in[0,1]$ και $\sigma_2(t) = t(1,0)+(0,1) = (t,1)$
$\forall t\in[0,1]$

Άρα, η (2) είναι

$$\int_0^1 f(0,t)\cdot(0,1)\,dt + \int_0^1 f(t,1)\cdot(1,0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t,-t)(0,1)\,dt + \int_0^1 (1,t-1)(1,0)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 t\,dt + \int_0^1 1\,dt = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Και τέλος έχουμε ότι το:
$C_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2,\ x\in[0,1]\} = \{(x,x^2) : x\in[0,1]\} =$
$= \{\gamma_3(t) = (t,t^2) : t\in[0,1]\}$

Συνεπώς,

$$\int_{C_3} f(x,y)\cdot d(x,y) = \int_0^1 f(\rho(t))\,\rho'(t)\,dt = \int_0^1 f(t,t^2)\cdot(1,2t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2, t-t^2)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 t^2+2t(t-t^2)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^2-2t^3)\,dt = t^3 - 2\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = 1-\frac{2}{4}-0 = \frac{1}{2}.$$

Για εξάσκηση θα μπορούσατε να κάνετε το ίδιο για τη συνάρτηση $g(x,y) = (y,\ y-x)$, με C_i το ίδιο με προηγουμένως

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Να εξετάσετε εαν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι πεδία κλίσεων (στο μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού) και αν ναι, τότε να βρείτε το δυναμικό τους.

i) $f(x,y) = (12xy+3, 6x^2)$ και ii) $f(x,y) = (xy, y)$

iii) $f(x,y,z) = (e^x \cdot \cos y + yz, xz - e^x \cdot \sin y, xy+z)$

iv) $f(x,y,z) = (2x-3, -z, \cos z)$

ΛΥΣΗ

i) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 12y & 12x \\ 12x & 0 \end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας και $\mathbb{R}^2$ αστερόμορφο

Άρα, η f είναι πεδίο κλίσεων

Επομένως, έχει νόημα η μαθηματική έκφραση:

$\nabla\varphi = f \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (12xy+3, 6x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = 12xy+3 \quad \& \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = 6x^2$

ολοκλ. ως προς x:

$\phi(x,y) = 6x^2y + 3x + g(y) \quad \& \quad \cancel{6x^2} + g'(y) = \cancel{6x^2} \Rightarrow g(y) = \tilde{C}$

Άρα,

$\phi(x,y) = 6x^2 y + 3x + \tilde{C}$

ii) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ όχι συμμετρικός

Άρα, η f όχι πεδίο κλίσεων

iii)

$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos y & -e^x \sin y + z & y \\ z - e^x \cdot \sin y & -e^x \cdot \cos y & x \\ y & x & 1 \end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας και $\mathbb{R}^3$ αστερόμορφο

Άρα, η f πεδίο κλίσεων

Επομένως $\exists \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε

$\nabla\varphi = f \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, x \cdot y + z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = e^x \cdot \cos y + yz, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = x \cdot y + z$

Ολοκληρώνουμε την $1^{η}$ ως προς x με y και z σταθερά

Άρα, παίρνουμε:

$$f(x,y,z)=\int e^x \cdot \cos y \, dx + \int yz \, dx + g(y,z) =$$
$$= e^x \cdot \cos y + xyz + g(y,z).$$

Τότε,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz - e^x \cdot \sin y \Rightarrow \cancel{-e^x \sin y} + \cancel{xz} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \cancel{xz} - \cancel{e^x \sin y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z)$$

Δηλαδή, $f(x,y,z) = e^x \cdot \cos y + xyz + h(z)$

Από την άλλη, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + z \Rightarrow \cancel{xy} + h'(z) = \cancel{xy} + z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + \tilde{C}$$

Δηλαδή, $f(x,y,z) = e^x \cdot \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + \tilde{C}$.

iv)

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\sin z \end{pmatrix}$$ μη συμμετρικός

Άρα, $\nexists \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $\nabla \varphi = f$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Την έννοια "πεδίο κλίσεων" μπορεί και να την βρείτε και σαν "συντηρητικό πεδίο" και οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.